

2026年度（令和8年度）大学院入試

# 数学問題 B

実施日時

2025年（令和7年）8月20日（水）

13:30～16:30

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない。
- 問題冊子は表紙も入れて7枚，問題は全部で6問である。
- 6問の中からちょうど3問を選択して解答すること。下の欄に，受験番号，氏名を記入し，選択した問題の番号を○で囲め。

受験番号	氏名					
選択問題番号	1	2	3	4	5	6

- 解答は，問題ごとに別々の答案用紙1枚に記入すること。  
答案用紙の裏面に記入してもよい。
- それぞれの答案用紙に 受験番号，氏名，問題番号を記入すること。
- 解答は日本語または英語で記入すること。
- 問題冊子の表紙，答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない。

[ 1 ]  $p$  を素数とし,  $\mathbb{F}_p$  を有限体  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  とする.  $\mathbb{F}_p$  は加法群であり,  $\mathbb{F}_p$  と  $\mathbb{F}_p$  の加法群としての直積  $\mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$  を  $M$  とおく.  $M$  から  $M$  への加法群としての同型写像全体のなす集合は写像の合成を演算として群になり, この群を  $G$  で表す.

(1)  $G$  の位数を求めよ.

(2)  $G$  の中心を求めよ.

(3) 零元ではない任意の 2 つの元  $x, y \in M$  に対して,  $g \in G$  であって  $g(x) = y$  となるものが存在することを示せ.

[ 2 ]  $R$  を可換環とし,  $1_R$  を  $R$  の乗法に関する単位元とする.  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in R$  が生成する  $R$  のイデアルを  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$  で表す.

(1)  $a, b \in R$  が  $(a, b) = (1_R)$  をみたすとき, 次の  $R$ -加群の準同型

$$g : R \times R \ni (x, y) \mapsto bx + ay \in R$$

と自然な環準同型  $\pi : R \rightarrow R/(ab)$  の合成  $\pi \circ g$  により,  $R$ -加群の同型

$$\bar{g} : R/(a) \times R/(b) \rightarrow R/(ab)$$

が得られることを示せ.

(2)  $a, b \in R$  が  $(a, b) = (1_R)$  をみたすとき,

$$(ab, a + b) = (1_R)$$

が成り立つことを示せ.

[ 3 ]  $n$  を 2 以上の整数とする.  $n$  次実正方行列全体のなす実線形空間を  $M_n$  とし,  $M_n$  を  $n^2$  次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^{n^2}$  と同一視する.  $n$  次単位行列を  $I_n$  とし,  $A \in M_n$  の転置行列を  ${}^tA$  で表す.  $n$  次実対称行列全体のなす  $M_n$  の線形部分空間を  $S_n$  とする.  $M_n$  から  $S_n$  への写像  $F: M_n \rightarrow S_n$  を

$$F(A) = {}^tAA$$

により定める.  $M_n$  の部分位相空間  $N_n = \{A \in M_n \mid F(A) = I_n\}$  について考える.

- (1)  $N_n$  は  $M_n$  の  $C^\infty$  級部分多様体となることを示せ. また  $C^\infty$  級部分多様体  $N_n$  の次元を求めよ.
- (2)  $N_n$  はコンパクトであることを示せ.
- (3)  $N_n$  は連結であるかどうか, 理由をつけて答えよ.

[ 4 ] 3次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  の部分集合  $A, B, C$  を

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |y| \leq -x + 1, x \geq 0, z = 0\},$$

$$C = \{(x, y, z) \in B \mid |y| = -x + 1\} \cup \{(x, y, z) \in B \mid x = 0\}$$

により定義する.  $X = A \cup B, Y = A \cup C$  とおき, これらを  $\mathbb{R}^3$  の相対位相によって位相空間と考える.

- (1) 位相空間  $X$  の整係数ホモロジー群  $H_k(X)$  ( $k = 0, 1, 2$ ) を求めよ.
- (2) 位相空間  $Y$  の整係数ホモロジー群  $H_k(Y)$  ( $k = 0, 1, 2$ ) を求めよ.
- (3) 連続写像  $f: X \rightarrow Y$  であって,  $f$  の  $Y$  への制限が  $Y$  の恒等写像になるものは存在しないことを示せ.

[ 5 ] 測度空間  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  上の  $\mathcal{F}$ -可測関数  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  について考える.

(1)  $f$  が  $X$  上で非負値であり,  $\int_X f(x) d\mu(x) = 0$  をみたすならば,  $\mu$  に関してほとんどすべての  $x \in X$  に対して  $f(x) = 0$  であることを示せ.

(2)  $f$  が  $X$  上で  $\mu$  に関して可積分であるとき, 次が成り立つことを示せ:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \mu(\{x \in X \mid |f(x)| \geq r\}) = 0.$$

(3)  $\mu(X) < \infty$  とし,  $X$  上で  $|f(x)| < 1$  が成り立つとする. このとき, 次の2つの条件が同値であることを示せ.

(i)  $a_n = \int_X f(x)^n d\mu(x)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) とおくと,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  は収束する.

(ii)  $\int_X \frac{1}{1-f(x)} d\mu(x) < \infty$ .

[ 6 ]  $f$  を  $\mathbb{R}$  上の実数値連続関数とする. 以下の問いに答えよ.

(1)  $a$  を  $\mathbb{R}$  上の実数値連続関数とし, 実数値の未知関数  $u$  に関する常微分方程式

$$u''(t) + a(t)u(t) = 0 \quad \dots\dots(*)$$

を考える.  $(*)$  の  $\mathbb{R}$  上の解のうち, 条件  $(u(0), u'(0)) = (1, 0)$  をみたすものを  $u_1$ , 条件  $(u(0), u'(0)) = (0, 1)$  をみたすものを  $u_2$  とする.  $\mathbb{R}$  上の関数  $v$  を

$$v(t) = \int_0^t (-u_1(t)u_2(s) + u_2(t)u_1(s))f(s) ds \quad (t \in \mathbb{R})$$

で定める. このとき, 次が成り立つことを示せ:

$$v''(t) + a(t)v(t) = f(t) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

(2)  $\lambda$  を正の実数とし, 実数値の未知関数  $u$  に関する次の常微分方程式を考える:

$$u''(t) + \lambda^2 u(t) = f(t) \quad \dots\dots(**)$$

広義積分  $\int_0^\infty |f(t)| dt$  は収束するとする. このとき,  $(**)$  の  $\mathbb{R}$  上の解  $u$  であって  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$  をみたすものがただ 1 つ存在することを示せ.

(3) 広義積分  $\int_{-\infty}^\infty |f(t)| dt$  は収束するとする. このとき, (2) の  $(**)$  の  $\mathbb{R}$  上の解  $u$  であって  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = 0$  をみたすものが存在することと,

$$\int_{-\infty}^\infty f(t) \cos(\lambda t) dt = \int_{-\infty}^\infty f(t) \sin(\lambda t) dt = 0$$

が成り立つことは同値であることを示せ.