2026 年度（令和 8 年度）大学院入試

数 学 問 題

実施日時

2025 年（令和 7 年）11 月 15 日（土）

9:00〜11:00

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない.
- 配布物は問題冊子，答案用紙 4 枚，下書き用紙 4 枚である.
  答案用紙，下書き用紙ともに追加配布はしない.
- 問題冊子は表紙も入れて 5 枚，問題は全部で 4 問である.
- 解答は，問題ごとに別々の答案用紙 1 枚に記入すること.
  答案用紙の裏面に記入してもよい.
- 解答開始の指示があったら，それぞれの答案用紙と下書き用紙に受験番号，氏名，問題番号を記入してから解答を始めよ.
- 解答は日本語または英語で記入すること.
- 答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない.

[1] $M_2(\mathbb{C})$ を複素数を成分とする 2 次正方行列全体のなす複素線形空間とし，線形写像 $f : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ を次で定める：

$$f(X) = x_{11} + x_{22} \quad \left(X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \right).$$

f の核 $\mathrm{Ker}\,(f)$ を V で表す．$M_2(\mathbb{C})$ の 3 つの元を次で定める：

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(1) $\{E_1, E_2, E_3\}$ は V の基底であることを示せ.

(2) A, $B \in M_2(\mathbb{C})$ ならば $AB - BA \in V$ であることを示せ.

(3) $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ とおき，線形写像 $\Phi : V \to V$ を次で定める：

$$\Phi(X) = JX - XJ \quad (X \in V).$$

このとき，V の基底 $\{E_1, E_2, E_3\}$ に関する Φ の表現行列を求めよ.

(4) (3) の線形写像 $\Phi : V \to V$ の固有値を求めよ.

[2] 次の問いに答えよ.

(1) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+xy+y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ とおくとき，次の重積分 I の値を求めよ.

$$I = \iint_D \frac{dxdy}{1+x^2+xy+y^2}.$$

(2) $\mathbb{R}^2$ 上の実数値 C^2 級関数 $f(x,y)$ に対して $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $g(s,t)$ を

$$g(s,t) = f(s^2-t^2, 2st) \quad (\,(s,t) \in \mathbb{R}^2\,)$$

で定める．任意の $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

が成り立つならば，任意の $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s^2}(s,t) + \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(s,t) = 0$$

が成り立つことを示せ.

[3] X を位相空間とし，A，B を X の空でない部分集合とする．以下の小問では X の部分集合に相対位相を入れて考える．

(1) A，B が連結で $A \cap B \neq \emptyset$ をみたすならば，$A \cup B$ は連結であることを示せ．

(2) A がコンパクトであり，かつ $X \setminus A$ に含まれる X の任意の閉集合がコンパクトであるならば，X はコンパクトであることを示せ．

[4] 虚数単位を i で表す．複素関数 $f(z) = \dfrac{ze^{iz}}{z^2+1}$ を考える．

(1) $r > 1$ に対し，曲線 C_r を $C_r : z = re^{it}$ $(0 \leq t \leq \pi)$ で定める．このとき $\displaystyle\lim_{r\to\infty} \int_{C_r} f(z)\,dz = 0$ を示せ．

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x \sin x}{x^2+1}\,dx$ の値を求めよ．