2024 年度（令和 6 年度）大学院入試

数 学 問 題 B

実施日時

2023 年（令和 5 年）8 月 23 日（水）

13:30～16:30

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない．
- 問題冊子は表紙も入れて 7 枚，問題は全部で 6 問である．
- 6 問の中からちょうど 3 問を選択して解答すること．下の欄に，受験番号，氏名を記入し，選択した問題の番号を○で囲め．

受験番号	氏名

選択問題番号						
	1	2	3	4	5	6

- 解答は，問題ごとに別々の答案用紙 1 枚に記入すること．
答案用紙の裏面に記入してもよい．
- それぞれの答案用紙に受験番号，氏名，問題番号を記入すること．
- 問題冊子の表紙，答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない．

[1] 自然数 n に対し，n を法とする剰余環 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を R_n とする．$\mathbb{Z}$ から R_n への自然な射影を $p_n\colon \mathbb{Z} \to R_n$ とあらわす．また，環 R_n の可逆元全体のなす乗法群を $R_n^{\times}$ とあらわす．以下の問いに答えよ．

(1) 次の性質 (i)，(ii) をみたすような写像 $\rho\colon R_8 \to R_{13}^{\times}$ がただ一つ存在することを示せ．

(i) 任意の $x, y \in R_8$ に対して $\rho(x+y) = \rho(x)\rho(y)$.

(ii) $\rho\bigl(p_8(1)\bigr) = p_{13}(5)$.

以下では，ρ を (1) で定まる写像とし，直積集合 $G = R_{13} \times R_8$ 上の二項演算 $*$ を

$$(a, b) * (c, d) = (a + \rho(b)c, b + d)$$

で定義する．

(2) $(G, *)$ は群の公理をみたすことを示せ．

(3) $(G, *)$ の単位元を e とあらわす．G の部分集合 K を

$$K = \{g \in G \mid g * g = e\}$$

と定める．K の要素の個数を求めよ．また K は G の部分群であるかどうか判定し，その理由を述べよ．

(4) G の部分集合 S を

$$S = \{g * g \mid g \in G\}$$

と定める．S の要素の個数を求めよ．また S の部分集合となるような G の共役類の個数を求めよ．

[2] $\mathbb{C}$ の部分環 R を $R = \{a + b\sqrt{-5} \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ で定める．各 $\alpha = a + b\sqrt{-5} \in R$ に対して

$$N(\alpha) = a^2 + 5b^2$$

と定義する．以下の問いに答えよ．

(1) すべての $\alpha, \beta \in R$ に対して

$$N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$$

が成り立つことを示せ．

(2) R の可逆元は ± 1 だけであることを示せ．

(3) 3 は R の既約元であることを示せ．

(4) 9 の既約分解を考えることにより，R は UFD（一意分解整域）でないことを示せ．

[3] $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$ に対して，

$$g_{m,n}\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad (x,y)\mapsto(x+m,(-1)^m y+n)$$

とおき，$\mathbb{R}^2$ の同値関係 $\sim$ を次で定める．

$$(x,y)\sim(x',y') \iff \text{ある } (m,n)\in\mathbb{Z}^2 \text{ が存在して，} (x',y')=g_{m,n}(x,y).$$

この同値関係による商空間 $\mathbb{R}^2/\sim$ を M とし，射影を $\pi\colon\mathbb{R}^2\to M$ とする．M には，射影 π が C^∞ 写像で，その微分 $(d\pi)_{(x,y)}$ がすべての $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ で階数 2 となるような C^∞ 多様体の構造を入れる．ω を M 上の C^∞ 級の 2 次微分形式とする．以下の問いに答えよ．

(1) 任意の $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$ に対して，$\pi^*\omega=(g_{m,n})^*\pi^*\omega$ を示せ．

(2) 関数 $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を $\pi^*\omega=f\,dx\wedge dy$ で定める．このとき，任意の $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ に対して $f(x+1,-y)=-f(x,y)$ を示せ．

(3) $\omega_p=0$ となる $p\in M$ が存在することを示せ．

[4] $\mathbb{R}^3$ の部分集合 A, B, C を

$$\begin{aligned} A &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\right\}, \\ B &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-2)^2+y^2=1,\ z=0\right\}, \\ C &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2+y^2=1,\ z=0\right\} \end{aligned}$$

により定義する．$X = A \cup B$，$Y = A \cup C$ とおき，これらを $\mathbb{R}^3$ の通常の位相に関する相対位相によって位相空間と考える．以下の問いに答えよ．ただし，n 次元球面 S^n $(n \geq 1)$ の整係数ホモロジー群 $H_k(S^n)$ が

$$H_k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (k=0,n), \\ 0 & (k \neq 0,n) \end{cases}$$

となることは証明なしに用いてよい．

(1) 位相空間 X の整係数ホモロジー群 $H_k(X)$ $(k=0,1,2)$ を求めよ．

(2) 位相空間 Y の整係数ホモロジー群 $H_k(Y)$ $(k=0,1,2)$ を求めよ．

[5] f は $\mathbb{R}$ 上で有界かつ連続な実数値関数で，$f(x)$ および $xf(x)$ は $\mathbb{R}$ 上でルベーグ可積分とし，

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx, \quad B = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$$

とする．$t \in \mathbb{R}$，$x \in \mathbb{R}$ に対して

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} f(x - ty + t^2)\,dy$$

と定義する． 以下の問いに答えよ．ただし

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi}$$

となることは証明なしに用いてよい．

(1) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{t \to 0} u(t,x) = f(x)$$

であることを示せ．

(2) 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t,x)\,dx = A$$

となることを示せ．

(3) 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} xu(t,x)\,dx$$

とするとき，$v(t)$ を A, B, t を用いて表せ．

[6] c を実数とする．f は $f(0) = 0$ となる $\mathbb{R}$ 上の C^1 級の実数値関数で，すべての $y \in \mathbb{R}$ に対して

$$yf(y) \leq 0$$

をみたすとする．また $[0, \infty)$ 上で定義された C^1 級の実数値関数 $u(t)$ は

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(t) &= f\big(u(t)\big), \quad t > 0, \\ u(0) &= c \end{aligned}$$

をみたしている． 以下の問いに答えよ．

(1) 任意の $t \geq 0$ に対して

$$u(t)^2 \leq c^2$$

であることを示せ．

(2) 極限 $\lim_{t \to \infty} u(t)$ が存在することを示せ．

(3) $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数 $v(t)$ が $\lim_{t \to \infty} v(t) = \alpha$ を満たすならば

$$\lim_{t \to \infty} \int_t^{t+1} f\big(v(s)\big) ds = f(\alpha)$$

となることを示せ．

(4) $\lim_{t \to \infty} u(t) = \alpha$ ならば $f(\alpha) = 0$ であることを示せ．